UNIVERSIDAD DE LA RIOJA

TRABAJO FIN DE ESTUDIOS

Título

Funtores Singular y Realización

Autor/es

IGNACIO MARCO PÉREZ

Director/es

LUIS JAVIER HERNÁNDEZ PARICIO y MARÍA TERESA RIVAS RODRÍGUEZ

Facultad

Facultad de Ciencia y Tecnología

Titulación

Grado en Matemáticas

Departamento

MATEMÁTICAS Y COMPUTACIÓN

Curso académico

2019-20

Funtores Singular y Realización, de IGNACIO MARCO PÉREZ
(publicada por la Universidad de La Rioja) se difunde bajo una Licencia Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-SinObraDerivada 3.0 Unported.
Permisos que vayan más allá de lo cubierto por esta licencia pueden solicitarse a los titulares del copyright.

© El autor, 2020
© Universidad de La Rioja, 2020
publicaciones.unirioja.es
E-mail: publicaciones@unirioja.es

UNIVERSIDAD
DE LA RIOJA

Facultad de Ciencia y Tecnología
Grado en Matemáticas

Trabajo Fin de Grado

Funtores Singular y Realización

Autor: Ignacio Marco Pérez
Tutores: Luis Javier Hernández Paricio y María Teresa Rivas Rodríguez

Curso 2019-2020

Resumen

Castellano

El objetivo del trabajo será exponer la profunda relación que existe entre los espacios topológicos y los conjuntos simpliciales. En primer lugar, introduciremos algunos conceptos de teoría de categorías. Posteriormente, la noción de conjunto simplicial, que vendrá sugerida por la introducción previa de los complejos simpliciales y los $\widehat{\Delta}$-conjuntos.

Mostraremos una definición categórica alternativa de los conjuntos simpliciales como funtores. Así trabajaremos con la categoría de conjuntos simpliciales, y relacionaremos esta con la categoría de los espacios topológicos mediante los funtores singular y realización.

Finalmente lograremos el objetivo principal probando que ambos funtores son adjuntos, aportando dos formas de llegar a dicho resultado.

English

The objective of the project will be to expose the deep relationship that exists between topological spaces and simplicial sets. First, we will introduce some concepts from category theory. Later, the notion of a simplicial set will be suggested by the previous introduction of the simplicial complexes and the $\widehat{\Delta}$-sets.

We will show an alternative categorical definition of the simplicial sets as functors. So we will work with the category of simplicial sets, and we will relate it to the category of topological spaces through the singular and realization functors.

Finally, we will accomplish the main objective by proving that both functors are adjoint, providing two ways to achieve this result.

Índice general

Introducción

La teoría de categorías, introducida por *Samuel Eilenberg* y *Saunders Mac Lane* en 1942, [4], trata de abstraer múltiples estructuras matemáticas y axiomatizarlas mediante el uso de objetos y flechas.

En este trabajo, que se enmarca dentro de la topología algebraica, aplicaremos algunos de los conceptos y resultados básicos de la teoría de categorías a los conjuntos simpliciales, introducidos por *Samuel Eilenberg* y *Joseph A. Zilber* en 1950, [5], con el objetivo de alcanzar una relación entre estos y los espacios topológicos.

Para ello, trataremos los conjuntos simpliciales junto con sus respectivos morfismos (a los que denominaremos morfismos simpliciales) y los espacios topológicos junto con sus correspondientes aplicaciones continuas como categorías que definiremos más adelante y denotaremos como **S** y **Top** respectivamente. También se definirán el funtor singular $\mathcal{S} : \mathbf{Top} \to \mathbf{S}$ y el funtor realización $|\cdot| : \mathbf{S} \to \mathbf{Top}$.

En este contexto, nuestro objetivo será demostrar que ambos funtores son adjuntos, es decir, que para cada conjunto simplicial X y para cada espacio topológico Y existe una biyección natural entre el conjunto de las aplicaciones continuas de la realización $|X|$ en Y y el conjunto de los morfismos simpliciales de X en el conjunto simplicial singular $\mathcal{S}(Y)$.

La importancia de este resultado es que el estudio de numerosas propiedades de los espacios topológicos se pueden enfocar de modo combinatorio.

Capítulo 1

Algunos conceptos en teoría de categorías

En este capítulo introduciremos algunos conceptos básicos de teoría de categorías que necesitaremos más adelante para alcanzar el objetivo del proyecto. Para una mayor profundización sobre la teoría de categorías se puede acudir a [7], [2], [11], [1].

1.1. Categorías

Definición 1.1.1: Una *categoría*[1] C es una estructura que consta de:

1. Una clase de objetos, a la que denotaremos por $\mathrm{Ob}(C)$.

2. Un conjunto asociado a cada par de objetos $a, b \in \mathrm{Ob}(C)$ que denotaremos $\mathrm{Hom}_C(a, b)$, al que llamaremos el conjunto de las flechas (o morfismos) de a en b. Sus elementos $f \in \mathrm{Hom}_C(a, b)$ suelen escribirse como $f : a \to b$.

3. Una aplicación $\mathrm{Hom}_C(a, b) \times \mathrm{Hom}_C(b, c) \to \mathrm{Hom}_C(a, c)$ para cada terna de objetos $a, b, c \in \mathrm{Ob}(C)$, que asocia a cada par $(f, g) \in \mathrm{Hom}_C(a, b) \times \mathrm{Hom}_C(b, c)$ un único morfismo $h \in \mathrm{Hom}_C(a, c)$, que suele denotarse $h = g \circ f$ y llamarse flecha *composición* de f y g, verificando:

   - $\forall f \in \mathrm{Hom}_C(a, b)$, $\forall g \in \mathrm{Hom}_C(b, c)$, $\forall j \in \mathrm{Hom}_C(c, d)$, se cumple que $j \circ (g \circ f) = (j \circ g) \circ f$.
   - $\forall b \in \mathrm{Ob}(C)$, $\exists id_b \in \mathrm{Hom}_C(b, b)$ tal que $\forall a \in \mathrm{Ob}(C)$, $\forall f \in \mathrm{Hom}_C(a, b)$, $\forall g \in \mathrm{Hom}_C(b, a)$, se tiene que $id_b \circ f = f$ y $g \circ id_b = g$.

[1] Si en la condición 2. no se exige que $\mathrm{Hom}_C(a, b)$ sea conjunto, entonces tenemos la definición de *metacategoría*.

En ocasiones denotaremos $a \in C$ en lugar de $a \in \mathrm{Ob}(C)$ cuando el contexto es suficientemente claro. Del mismo modo, a veces denotaremos la composición de f y g como gf en lugar de $g \circ f$.

Se dice que una categoría C es *pequeña* si $\mathrm{Ob}(C)$ es además un conjunto.

Veamos unos ejemplos bastante simples para ilustrar estas ideas:

- **0** es la categoría vacía, sin objetos ni flechas.
- **1** es la categoría que contiene un único objeto y una única flecha (la identidad).
- **2** es la categoría con dos objetos a y b y una única flecha distinta de la identidad $f : a \to b$
- **3** es la categoría con tres objetos a, b, c y cuyas flechas no identidad se representan mediante el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[dr] & b \arrow[d] \\ & c \end{tikzcd}$$

- $\downarrow\downarrow$ es la categoría con dos objetos a y b y dos flechas no identidad

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] & b \end{tikzcd}$$

Notemos que las categorías **0**, **1**, **2**, **3** y $\downarrow\downarrow$ son pequeñas.

Mediante este tipo de procesos podemos construir distintas categorías cuya clase de objetos tiene cardinalidad finita.

Notemos que podemos considerar los conjuntos como *categorías discretas*, es decir, como categorías cuyos objetos son los elementos del propio conjunto y que contienen únicamente una flecha identidad asociada a cada elemento.

Unas categorías que son utilizadas habitualmente son las categorías **Set** y **Top**:

- La categoría **Set** que es aquella que tiene por objetos todos los conjuntos y por flechas todas las aplicaciones entre ellos.
- La categoría **Top** es aquella que tiene por objetos todos los espacios topológicos y por flechas todas las aplicaciones continuas entre ellos[2].

[2] Para las definiciones y resultados relativos a la teoría de conjuntos y espacios topológicos puede acudirse al libro de *Dugundji* [3]

Otras dos categorías fundamentales en este proyecto son la categoría Δ y la categoría $\widehat{\Delta}$:

Consideremos para cada n entero mayor o igual que 0 el conjunto totalmente ordenado

$$[n] = \{0, 1, ..., n\}$$

- La categoría Δ, también llamada *categoría simplicial*, es aquella que tiene por objetos todos los ordinales finitos no vacíos $[n]$, $n \geq 0$, y por flechas todas las aplicaciones crecientes

$$f : [m] \to [n],$$

  es decir, si $i \leq j$ en $[m]$ entonces $f(i) \leq f(j)$ en $[n]$.

- La categoría $\widehat{\Delta}$ es aquella que tiene por objetos todos los ordinales finitos no vacíos $[n]$, $n \geq 0$, y por flechas todas las aplicaciones estrictamente crecientes

$$f : [m] \to [n],$$

  es decir, si $i < j$ en $[m]$ entonces $f(i) < f(j)$ en $[n]$.

Definición 1.1.2: Dadas dos categorías C, D, se dice que D es una *subcategoría* de C si:

- $\mathrm{Ob}(D)$ es una subclase de $\mathrm{Ob}(C)$.
- Para cualesquiera $a, b \in \mathrm{Ob}(D)$ se tiene que $\mathrm{Hom}_D(a, b) \subset \mathrm{Hom}_C(a, b)$.
- Para cualesquiera $a, b, c \in \mathrm{Ob}(D)$ y para cualesquiera flechas $f \in \mathrm{Hom}_D(a, b)$, $g \in \mathrm{Hom}_D(b, c)$ se tiene que $g \circ_D f = g \circ_C f$, con $\circ_D$ y $\circ_C$ las composiciones en D y C respectivamente.
- Para cualquier $a \in \mathrm{Ob}(D)$, se tiene que $(id_a)_D = (id_a)_C$ con $(id_a)_D$ e $(id_a)_C$ las identidades de a en D y C respectivamente.

En caso de que para cualesquiera objetos $a, b \in D$ se tenga que $\mathrm{Hom}_D(a, b) = \mathrm{Hom}_C(a, b)$, se dirá que D es una subcategoría *plena* de C.

Por ejemplo, consideremos la categoría **Grp**, que es aquella que tiene por objetos todos los grupos y por flechas todos los homomorfismos entre grupos. Se denota por **Ab** a la subcategoría plena de **Grp** cuyos objetos son todos los grupos abelianos.

La categoría $\widehat{\Delta}$ es una subcategoría (no plena) de Δ. De hecho, la categoría $\widehat{\Delta}$ es la mayor subcategoría de Δ tal que todas sus flechas $m : a \to b$ con $a, b \in \widehat{\Delta}$

son además *mónicas*, es decir, que dadas otras dos flechas $f_1, f_2 : d \to a$ en $\widehat{\Delta}$ se cumple que

$$m \circ f_1 = m \circ f_2 \implies f_1 = f_2$$

Definición 1.1.3: Sea una categoría C. Se llama *categoría opuesta* de C, y se denota por C^{op}, a la categoría tal que $\mathrm{Ob}(C^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Ob}(C)$ y para $a, b \in \mathrm{Ob}(C^{\mathrm{op}})$, una flecha $f : b \to a$ en C^{op} es una flecha $f : a \to b$ en C, así que $\mathrm{Hom}_{C^{\mathrm{op}}}(b, a) = \mathrm{Hom}_C(a, b)$.

Más adelante haremos uso de las categorías Δ^{op} y $\widehat{\Delta}^{\mathrm{op}}$.

1.2. Funtores

Hemos definido la estructura de categoría, por lo que parece natural estudiar las relaciones entre ellas. Estas serán lo que se denominarán funtores, noción que presentamos ahora.

Definición 1.2.1: Dadas dos categorías C, B, un *funtor covariante* (o simplemente *funtor*) $T : C \to B$ consiste en:

1. Una correspondencia que asigna a cada $c \in \mathrm{Ob}(C)$ un único objeto $T(c) \in \mathrm{Ob}(B)$ (al que por brevedad a veces denotaremos Tc).

2. Una correspondencia que asigna a cada flecha $f \in \mathrm{Hom}_C(c, c')$ una flecha $T(f) \in \mathrm{Hom}_B(Tc, Tc')$ (a la que a veces denotaremos Tf) de tal forma que se cumplen las siguientes propiedades:

   - Para cualquier $c \in \mathrm{Ob}(C)$ se tiene que $T(id_c) = id_{Tc}$
   - Para cualesquiera $a, b, c \in \mathrm{Ob}(C)$ y para cualesquiera flechas $f \in \mathrm{Hom}_C(a, b)$, $g \in \mathrm{Hom}_C(b, c)$ se tiene que $T(g \circ f) = Tg \circ Tf$.

De modo análogo, si en la definición anterior, la segunda correspondencia asigna a cada flecha $f \in \mathrm{Hom}_C(c, c')$ una flecha $Tf \in \mathrm{Hom}_B(Tc', Tc)$ y además sustituimos la última propiedad por la siguiente:

- Para cualesquiera $a, b, c \in \mathrm{Ob}(C)$ y para cualesquiera flechas $f \in \mathrm{Hom}_C(a, b)$, $g \in \mathrm{Hom}_C(b, c)$ se tiene que $T(g \circ f) = Tf \circ Tg$.

tenemos que T es lo que se define como un *funtor contravariante*.

Notemos que podemos definir un funtor contravariante $T : C \to B$ como un funtor covariante en la categoría opuesta $T : C^{\mathrm{op}} \to B$ y viceversa.

Si C es una categoría pequeña, un funtor de C en otra categoría B se suele denominar como *diagrama* en B.

Existen dos ejemplos triviales de funtores: Dada una categoría C, se llama *funtor identidad* al funtor $1_C : C \to C$, que envía cada objeto y flecha de C al mismo en C. Si S es una subcategoría de C, el *funtor inclusión* $I : S \to C$ es aquel que envía cada objeto y flecha de S al mismo en C.

Otro ejemplo interesante de funtor es el funtor de partes de un conjunto. Recordemos que, para un conjunto dado X, se define el conjunto de *partes*[3] *de* X, denotado por $\mathcal{P}(X)$, como aquel formado por todos los subconjuntos de X. De este modo, el *funtor de partes de un conjunto* $\mathcal{P} : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ es aquel que asigna a cada conjunto X el conjunto $\mathcal{P}(X)$, y a cada flecha $f : X \to Y$ la flecha $\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y)$, que es aquella que envía cada $S \subset X$ a su imagen $f(S) \subset Y$.

Notemos que también podemos definir el funtor contravariante $\tilde{\mathcal{P}} : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$, tal que para conjunto X se toma $\tilde{\mathcal{P}}(X) = \mathcal{P}(X)$, y para cada aplicación $f : X \to Y$ se toma $\tilde{\mathcal{P}}(f) : \tilde{\mathcal{P}}(Y) \to \tilde{\mathcal{P}}(X)$ de manera que cada subconjunto $T \subset Y$ se transforma en $\tilde{\mathcal{P}}(f)(T) = f^{-1}(T)$.

Normalmente, se dice que un funtor es *de olvido* (*forgetful*) si "olvida" alguna parte de la estructura de un objeto. Por ejemplo, el funtor $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ que asigna a cada grupo G el conjunto $U(G)$ de sus elementos (olvidando la operación del grupo) es un funtor de olvido. Otro ejemplo de funtor de olvido es el funtor $V : \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ que envía cada espacio topológico a su conjunto subyacente.

Dados dos funtores $T : C \to B$ y $S : B \to A$ definidos para las categorías A, B y C, se define su *composición* como el funtor $S \circ T : C \to A$ (al que a veces denotaremos ST) tal que:

- $\forall c \in \mathrm{Ob}(C)$, $(S \circ T)(c) = S(T(c))$.
- $\forall f \in \mathrm{Hom}_C$, $(S \circ T)(f) = S(T(f))$.

De acuerdo con esta definición, podemos considerar la *metacategoría de todas las categorías*, cuyos objetos son todas las categorías y cuyas flechas son todos los funtores con la composición descrita. Del mismo modo, podemos considerar la *categoría de todas las categorías pequeñas* **Cat**, cuyos objetos son todas las categorías pequeñas y cuyas flechas son todos los funtores con la composición descrita.

Definición 1.2.2: Consideremos ahora una categoría C. Para cada objeto $a \in C$ se define el *hom-funtor (covariante)*

$$\mathrm{Hom}_C(a, -) : C \to \mathbf{Set}$$

[3]Al conjunto de partes de X se le denomina también como *conjunto potencia* de X.

como aquel que envía cada objeto $b \in C$ al conjunto $\mathrm{Hom}_C(a,b)$ y cada flecha $k : b \to b'$ en C a la aplicación

$$\mathrm{Hom}_C(a,k) : \mathrm{Hom}_C(a,b) \to \mathrm{Hom}_C(a,b')$$

definida mediante la asignación $f \mapsto k \circ f$ para cada $f : a \to b$ de C.

Para cada objeto $b \in C$ se define el *hom-funtor contravariante*

$$\mathrm{Hom}_C(-,b) : C \to \mathbf{Set}$$

como aquel que envía cada objeto $a \in C$ al conjunto $\mathrm{Hom}_C(a,b)$ y cada flecha $g : a \to a'$ en C a la aplicación

$$\mathrm{Hom}_C(g,b) : \mathrm{Hom}_C(a',b) \to \mathrm{Hom}_C(a,b)$$

definida mediante la asignación $f \mapsto f \circ g$ para cada $f : a' \to b$ de C.

Notemos que el hom-funtor contravariante es en realidad el funtor covariante

$$\mathrm{Hom}_C(-,b) : C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$$

.

Definición 1.2.3: Sean C, B categorías y $T : C \to B$ un funtor.

Se dice que T es un *isomorfismo de categorías* si es una biyección tanto para los objetos como para las flechas. Equivalentemente, podemos decir que T es un isomorfismo si y solo si existe un funtor $S : B \to C$ tal que las composiciones $S \circ T$ y $T \circ S$ son el funtor identidad para C y B respectivamente. En ese caso se dice que S es el inverso T^{-1} de T.

Se dice que T es *pleno* si para cada par de objetos $c, c' \in C$ y para cada flecha $g : Tc \to Tc'$ de B existe una flecha $f : c \to c'$ de C tal que $T(f) = g$. Es evidente que la composición de dos funtores plenos es pleno.

Se dice que T es *fiel* si para cada par de objetos $c, c' \in C$ y para cada par de flechas $f_1, f_2 : c \to c'$ de C la igualdad $Tf_1 = Tf_2 : Tc \to Tc'$ implica $f_1 = f_2$. Notemos que, del mismo modo, la composición de dos funtores fieles es fiel.

Por ejemplo, el funtor de olvido $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ es fiel pero no es pleno.

Si S es una subcategoría de una categoría C, podemos observar que S es una subcategoría plena de C si y solo si el funtor inclusión $I : S \to C$ es pleno.

1.3. Transformaciones Naturales

Definición 1.3.1: Dados dos funtores $S, T : C \to B$, una *transformación natural* $\tau : S \to T$ consiste en asignar a cada objeto $c \in C$ una flecha $\tau_c : Sc \to Tc$ de B (que en caso de no haber confusión también se suele denotar por τc) de tal forma que cada flecha $f : c \to c'$ de C genera un diagrama en B

$$\begin{tikzcd} c \arrow[d, "f"] & Sc \arrow[r, "\tau c"] \arrow[d, "Sf"'] & Tc \arrow[d, "Tf"] \\ c' & Sc' \arrow[r, "\tau c'"] & Tc' \end{tikzcd}$$

que es conmutativo. Este hecho suele expresarse diciendo que $\tau_c : Sc \to Tc$ es *natural* en c.

Intuitivamente, si pensamos en el funtor S considerando todos los objetos y flechas de la categoría C, entonces la tranformación natural τ es un conjunto de flechas que trasladan el "dibujo" generado por S al generado por T. Por ejemplo, si consideramos los objetos $a, b, c \in C$ y las flechas f, g, h descritas mediante el siguiente diagrama de la izquierda, entonces tenemos que el de la derecha es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "h"'] & \\ & b \arrow[dl, "g"] \\ c & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Sa \arrow[rr, "\tau a"] \arrow[dr, "Sf"] \arrow[dd, "Sh"'] & & Ta \arrow[dr, "Tf"] \arrow[dd, "Th"'] & \\ & Sb \arrow[rr, "\tau b"] \arrow[dl, "Sg"] & & Tb \arrow[dl, "Tg"] \\ Sc \arrow[rr, "\tau c"] & & Tc & \end{tikzcd}$$

A las flechas $\tau a, \tau b, \tau c, ...$ se les llama *componentes* de la transformación natural τ.

Cuando se cumple que todos los componentes de una transformación natural son invertibles en B, es decir, que para cada componente τ_c existe una flecha $\tau_c^{-1} : Tc \to Sc$ tal que $\tau_c^{-1} \circ \tau_c = id_{Sc}$ y $\tau_c \circ \tau_c^{-1} = id_{Tc}$, entonces se dice que τ es un *isomorfismo natural* entre los funtores S y T ($\tau : S \cong T$). Si τ es un isomorfismo natural, entonces las inversas τ_c^{-1} son los componentes del isomorfismo natural $\tau^{-1} : T \to S$.

Definición 1.3.2: Sean C, D dos categorías y sean $F : C \to D$, $G : D \to C$ dos funtores. Se dice que F es *adjunto a izquierda* de G (o equivalentemente que G es *adjunto a derecha* de F) si existen biyecciones $\mathrm{Hom}_D(F(c), d) \cong \mathrm{Hom}_C(c, G(d))$ que son naturales para todo $c \in \mathrm{Ob}(C)$ y $d \in \mathrm{Ob}(D)$.

Esta definición es equivalente a decir que para cada flecha $f : c \to G(d)$ de C existe una única flecha $g : F(c) \to d$ en D, y para cada flecha $g : F(c) \to d$ de D existe una única flecha $f : c \to G(d)$ de C, de manera que los siguientes diagramas son conmutativos:

$$\begin{tikzcd} & F(c) \arrow[dl, "F(f)"'] \arrow[dr, "g"] & \\ FG(d) \arrow[rr, "\sigma_d"'] & & d \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & G(d) & \\ c \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\tau_c"'] & & GF(c) \arrow[ul, "G(g)"'] \end{tikzcd}$$

donde $\sigma : F \circ G \to 1_D$ y $\tau : 1_C \to G \circ F$ son dos transformaciones naturales que cumplen que

- $F \xrightarrow{F\tau} FGF \xrightarrow{\sigma F} F$ es la transformación natural 1_F.
- $G \xrightarrow{\tau G} GFG \xrightarrow{G\sigma} G$ es la transformación natural 1_G.

y a las que se denomina *counidad* y *unidad* respectivamente.

Una propiedad interesante sobre funtores adjuntos es la siguiente: Si un funtor $F : C \to D$ tiene dos funtores $G, G' : D \to C$ adjuntos a derecha, entonces G y G' son naturalmente isomorfos, es decir, existe un isomorfismo natural $\tau : G \cong G'$.

Lo mismo ocurre con los adjuntos a izquierda.

Definición 1.3.3: Para cada par de categorías B, C se define la *categoría de funtores de C a B*, denotada por B^C, como aquella cuyos objetos son los funtores $T : C \to B$ y cuyas flechas son las transformaciones naturales entre ellos.

Las categorías de funtores son muy utilizadas. Por ejemplo, sean B y C dos conjuntos. Si los pensamos como categorías discretas, entonces la categoría B^C es el conjunto de todas las aplicaciones $f : C \to B$. En particular, sea $B = \{0, 1\}$, entonces $\{0, 1\}^C$ es isomorfo al conjunto de todos los subconjuntos de C, es decir, es isomorfo a $\mathcal{P}(C)$.

Definición 1.3.4: Sea C una categoría pequeña. Se dice que un funtor $F : C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ es un *pre-haz* en C.

La categoría funtorial de pre-haces $\mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}$ es aquella que tiene por objetos todos los pre-haces en C y por flechas todas las transformaciones naturales entre ellos.

Definición 1.3.5: Sea C una categoría pequeña. Para cada objeto $c \in C$, se denota por $y(c)$ el pre-haz en C definido sobre los objetos $d \in C$ por

$$y(c)(d) = \mathrm{Hom}_C(d, c)$$

y sobre las flechas $\alpha : d' \to d$ en C por

$$y(c)(\alpha) : \mathrm{Hom}_C(d, c) \to \mathrm{Hom}_C(d', c)$$

donde para cada $u : d \to c$ en C se define $y(c)(\alpha)(u) = u \circ \alpha$

Notemos que $y(c) = \mathrm{Hom}_C(-, c) : C \to \mathbf{Set}$ es un hom-funtor contravariante, es decir, $y(c)$ es un funtor

$$y(c) : C^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$$

Los pre-haces isomorfos a alguno de esta forma son llamados *representables.*

Notemos que si $f : c_1 \to c_2$ es una flecha en C, existe una transformación natural $y(c_1) \to y(c_2)$ obtenida por composición con f.

De este modo, se tiene el *funtor de Yoneda*

$$y : C \to \mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}$$

que envía cada objeto $c \in C$ a $\mathrm{Hom}_C(-, c)$ y cada flecha $f : c_1 \to c_2$ en C a la transformación natural $y(f) : y(c_1) \to y(c_2)$ dada de forma natural para cada $d \in C$ por

$$\begin{aligned}(y(f))(d) : (y(c_1))(d) &\to (y(c_2))(d)\\ \alpha &\mapsto (y(f))(d)(\alpha)\end{aligned}$$

donde para cada $\alpha : d \to c_1$ en C se define $(y(f))(d)(\alpha) = \alpha_* = f \circ \alpha$.

Lema de Yoneda (1.3.6): Sea C una categoría pequeña. Dados $P \in \mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}$, $c \in C$, existe una biyección natural

$$\theta : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}}\big(y(c), P\big) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}}\big(\mathrm{Hom}_C(-, c), P\big) \to P(c)$$

que envía cada transformación natural $\alpha : y(c) = \mathrm{Hom}_C(-, c) \to P$ a $\alpha_c id_c$.

Una demostración explicitada para el lema en su versión dual puede encontrarse en el libro de *S. Mac Lane*, [7].

Dada una categoría pequeña C, al aplicar el lema de Yoneda (1.3.6) para un pre-haz arbitrario P en C y un objeto $c \in C$ tenemos que existe una correspondencia biyectiva entre las transformaciones naturales $y(c) \to P$ y los elementos del conjunto $P(c)$. Esto nos garantiza que el funtor de Yoneda $y : C \to \mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}$ es un funtor pleno y fiel. Es por esto por lo que se le suele llamar también *embebimiento de Yoneda.*

De este modo, podemos pensar C como una subcategoría plena de $\mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}$, y cada objeto $c \in C$ como un pre-haz en C.

Proposición 1.3.7: Dadas dos categorías D, D' y un funtor $\psi : D \to D'$, para cada categoría dada C, ψ induce de modo natural un funtor $\psi_* : D^C \to D'^C$ dado por $\psi_*(G) = \psi \circ G$ para cada $G \in \mathrm{Ob}(D^C)$.

Proposición 1.3.8: Dadas dos categorías C, C' y un funtor $\phi : C \to C'$, para cada categoría dada D, ϕ induce de modo natural un funtor $\phi^* : D^{C'} \to D^C$ dado por $\phi^*(F) = F \circ \phi$ para cada $F \in \mathrm{Ob}(D^{C'})$.

Por ejemplo, sean C, C' dos conjuntos considerados como categorías discretas. Dada una aplicación $f : C \to C'$, queda inducida la aplicación $f' :$

$\{0,1\}^{C'} \to \{0,1\}^{C}$, que se corresponde con el funtor $\tilde{\mathcal{P}}(f)$ introducido anteriormente.

1.4. Límites y colímites, productos y coproductos

Definición 1.4.1: Sean J una categoría pequeña y C una categoría. Consideramos un funtor $F : J \to C$. Se llama *cono inductivo* o *cocono* de la base F al vértice $c \in C$ a una familia de flechas en C, $\{u_i : F(i) \to c\}_{i\in J}$, tal que para cualquier i, j objetos de J y $\alpha : i \to j$ flecha en J se verifica que

$$\begin{tikzcd}
F(i) \arrow[dr, "u_i"] \arrow[dd, "F(\alpha)"'] & \\
& c \\
F(j) \arrow[ur, "u_j"'] &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Se llama *límite iductivo* o *colímite* de F a un cono inductivo de la base F al vértice $k \in C$, $\{v_i : F(i) \to k\}_{i\in J}$, tal que se verifica la siguiente propiedad universal: Para todo cono inductivo $\{u_i : F(i) \to c\}_{i\in J}$ de la base F al vértice $c \in C$, existe una única flecha $h : k \to c$ en C tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
& k \arrow[dd, "h"] \\
F(i) \arrow[ur, "v_i"] \arrow[dr, "u_i"'] & \\
& c
\end{tikzcd}$$

es conmutativo para cada $i \in J$.

Al objeto k se le denota como $\mathrm{Colim}F$. El colímite $k = \mathrm{Colim}F$ es único salvo isomorfismo.

Definición1.4.2: Sean J una categoría pequeña y C una categoría. Consideramos un funtor $F : J \to C$. Se llama *cono proyectivo* o simplemente *cono* del vértice $m \in C$ a la base F a una familia de flechas en C, $\{r_i : m \to F(i)\}_{i\in J}$, tal que para cualquier i, j objetos de J y $\alpha : i \to j$ flecha en J se verifica que

$$\begin{tikzcd}
 & F(i) \arrow[dd, "F(\alpha)"] \\
m \arrow[ur, "r_i"] \arrow[dr, "r_j"'] & \\
 & F(j)
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Se llama *límite proyectivo* o simplemente *límite* de F a un cono proyectivo del vértice $p \in C$ a la base F, $\{q_i : p \to F(i)\}_{i \in J}$, tal que se verifica la siguiente propiedad universal: Para todo cono proyectivo $\{r_i : m \to F(i)\}_{i \in J}$ del vértice $m \in C$ a la base F, existe una única flecha $l : m \to p$ en C tal que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
m \arrow[dd, "l"'] \arrow[dr, "r_i"] & \\
 & F(i) \\
p \arrow[ur, "q_i"'] &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo para cada $i \in J$.

Al objeto p se le denota como $\mathrm{Lim}F$. El límite $p = \mathrm{Lim}F$ es único salvo isomorfismo.

Un ejemplo muy simple de colímite puede ser el siguiente: Consideremos la categoría $J = \omega = \{0 \to 1 \to 2 \to ...\}$ y un funtor $F : \omega \to \mathbf{Set}$ que envíe cada objeto i de ω a un conjunto F_i tal que se genere la sucesión de conjuntos $F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset ...$, enviando cada flecha a la inclusión correspondiente.

En este caso, $\mathrm{Colim}F$ es la unión U de todos los conjuntos F_n con el cocono dado por las aplicaciones $F_n \to U$:

$$\begin{tikzcd}
F_0 \arrow[r] \arrow[dr] & F_1 \arrow[r] \arrow[d] & F_2 \arrow[r] \arrow[dl] & ... \\
 & U = \cup_n F_n & &
\end{tikzcd}$$

Definición 1.4.3: Sea J una categoría discreta. Sea C una categoría y $F : J \to C$ un funtor. Entonces podemos considerar a F como la familia $\{F(i)\}_{i \in J}$ de objetos de C.

En este caso, al colímite de F se le llama *coproducto* o *suma directa*, y se le denota por $\mathrm{Colim}F = \coprod_{j\in J} F(j)$:

$$\{v_i : F(i) \to \coprod_{j\in J} F(j)\}_{i\in J}.$$

Al límite de F se le llama *producto* o *producto directo*, y se denota por $\mathrm{Lim}F = \prod_{j\in J} F(j)$:

$$\{q_i : \prod_{j\in J} F(j) \to F(i)\}_{i\in J}.$$

Por ejemplo, si consideramos (con J categoría discreta) $F : J \to \mathbf{Set}$, el coproducto $\coprod_{j\in J} F(j)$ es igual a la unión disjunta de los conjuntos $F(j)$, y el producto $\prod_{j\in J} F(j)$ es igual a producto cartesiano de los $F(j)$.

Si consideramos $F : J \to \mathbf{Top}$, el coproducto $\coprod_{j\in J} F(j)$ es igual al espacio topológico cuyo conjunto subyacente es la unión disjunta de los conjuntos subyacentes de los espacios $F(j)$, y cuyos abiertos son los subconjuntos del conjunto subyacente tales que al intersecarlos con los espacios $F(j)$ son abiertos, y el producto $\prod_{j\in J} F(j)$ es igual al espacio topológico producto, es decir, el espacio topológico cuyo conjunto subyacente es el producto cartesiano de los conjuntos subyacentes de los $F(j)$ y cuya topología es la llamada topología de Tychonoff (ver [3]) o topología producto.

Definición 1.4.4: Dada una categoría C, se dice que C tiene límites (respectivamente colímites) si para todo funtor $F : J \to C$ de una categoría pequeña J a C, existe el límite (respectivamente colímite) de F.
Si C tiene límites (respectivamente colímites), entonces se dice que es una categoría *completa* (respectivamente *cocompleta*).

Podemos observar que C es completa (cocompleta) si y solo si C^{op} es cocompleta (completa).

Un ejemplo de categoría completa y cocompleta es **Top**. Si consideramos una categoría pequeña J y un funtor $F : J \to \mathbf{Top}$, los límites y colímites en esta categoría son los siguientes:

- El límite de F en **Top**, $\mathrm{Lim}F$, es el subespacio p del espacio producto $\{q_i : \prod_{j\in J} F(j) \to F(i)\}_{i\in J}$ definido como

$$p = \{x \in \prod_{l\in J} F(l) \,|\, F(\alpha)(q_i(x)) = q_j(x),\ \forall \alpha : i \to j\}$$

- El colímite de F en **Top**, $\mathrm{Colim}F$, es el espacio cociente $k = \frac{\coprod_{j\in J} F(j)}{\sim}$, obtenido del espacio unión disjunta $\coprod_{j\in J} F(j)$:

$$\coprod_{j\in J} F(j) = \cup_{j\in J} F(j)\times\{j\}$$

y donde $\sim$ está definida por:

$$\forall \alpha : i \to j, \qquad l_i(a) \sim (l_j \circ F(\alpha))(a) \quad \forall a \in F(i)$$

con l_i la inclusión $l_i : F(i) \to \coprod_{j\in J} F(j)$.

Capítulo 2

Construcción de los conjuntos simpliciales

En este capítulo, llegaremos de forma intuitiva al concepto de conjunto simplicial, definiendo primero los complejos simpliciales y los $\widehat{\Delta}$-conjuntos, así como los morfismos de estas estructuras. Además, mediante la aplicación de algunos conceptos presentados en el Capítulo 1, daremos también una definición categórica de los conjuntos simpliciales.

Debemos advertir que en este capítulo cometeremos algún abuso de notación, tratando siempre de mantener la claridad de los enunciados, con el objetivo de facilitar la comprensión de la introducción de las nociones de $\widehat{\Delta}$-conjunto y conjunto simplicial.

2.1. Complejos simpliciales

En la topología algebraica elemental, los conjuntos simpliciales son, básicamente, generalizaciones de complejos simpliciales geométricos, por lo que comenzaremos dando unas nociones básicas sobre complejos simpliciales.

Definición 2.1.1: Un *n-símplice (geométrico)* es el conjunto convexo generado por $n+1$ puntos independientes $\{v_0, v_1, ..., v_n\}$ (los n vectores $v_1 - v_0, v_2 - v_0, ..., v_n - v_0$ son linealmente independientes) en un espacio euclídeo determinado. Podemos notar que los n-símplices son homeomorfos a una bola cerrada n-dimensional. Los puntos $\{v_0, v_1, ..., v_n\}$ son llamados *vértices* del n-símplice.

Denotaremos al n-símplice (geométrico) generado por $\{v_0, v_1, ..., v_n\}$ como $[v_0, v_1, ..., v_n]$ [1].

Denominamos *cara* de un n-símplice al conjunto convexo generado por algún subconjunto de sus vértices.

[1]Debemos tener cuidado con esta notación, ya que recordemos que denotábamos a los objetos de la categoría Δ por $[n]$.

Definición 2.1.2: Un *complejo simplicial (geométrico)* X en $\mathbb{R}^N$ consiste en una colección de símplices en $\mathbb{R}^N$, posiblemente de varias dimensiones, que cumplen que cada cara de un símplice de X está en X y que la intersección de dos símplices cualesquiera de X es una cara de ambos.

El siguiente dibujo, por ejemplo, representa el complejo simplicial formado por los símplices $[v_0, v_1, v_2]$, $[v_1, v_2, v_3]$ y $[v_3, v_4, v_5]$ y sus caras:

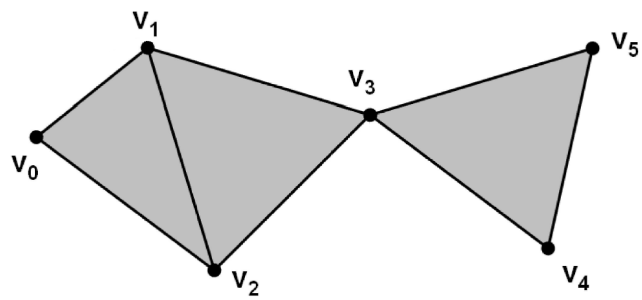

Figura 1: Complejo simplicial.

Sean $v_0, ..., v_n$ puntos independientes. Entonces, utilizaremos también la notación $[v_0, ..., v_n]$ para denotar el complejo simplicial generado por todas las caras de la clausura convexa de estos puntos independientes.

Un *complejo simplicial abstracto* es una estructura formada por un conjunto de "vértices" X^0 junto con, para cada $k \in \mathbb{N}$, un conjunto X^k formado por subconjuntos de X^0 de cardinalidad $k+1$. Estos deben satisfacer la condición de que cada subconjunto de $(j+1)$ elementos de cada elemento de X^k es un elemento de X^j.

Cada elemento de X^k es un *k-símplice abstracto*, y el último requisito de la definición garantiza que cada cara de un símplice abstracto de un complejo simplicial abstracto es a su vez un símplice del complejo simplicial.

Notemos que la información combinatorial de símplice y complejo simplicial geométricos es la misma que la de símplice y complejo simplicial abstractos respectivamente.

2.2. Aplicaciones simpliciales

A continuación introduciremos la noción de aplicación simplicial como morfismo entre dos complejos simpliciales geométricos, que jugará un importante papel en el paso de complejo simplicial a conjunto simplicial.

Definición 2.2.1: Sean K, L dos complejos simpliciales geométricos. Entonces, una *aplicación simplicial* $f : K \to L$ es aquella que lleva los vértices $\{v_i\}$ de K a vértices $\{f(v_i)\}$ de L y tal que si $[v_{i_0}, ..., v_{i_k}]$ es un símplice de K, entonces $f(v_{i_0}), ..., f(v_{i_k})$ son todos los vértices de algún símplice de L (teniendo en cuenta que no tienen por qué ser distintos).

Podemos darnos cuenta de que la aplicación simplicial $f : K \to L$ viene totalmente determinada por la aplicación $K^0 \to L^0$. Si $x \in K$ viene representado por $x = \sum_{j=1}^{n} t_j v_{i_j}$ en coordenadas baricéntricas del símplice generado por los vértices v_{i_j}, entonces se tiene que $f(x) = \sum_{j=1}^{n} t_j f(v_{i_j})$.

Un ejemplo trivial de aplicación simplicial es el siguiente: Sea X un complejo simplicial tal que $v_{i_0}, ..., v_{i_n}$ es una colección de vértices de X que generan un n-símplice de X. Consideremos K el complejo simplicial generado por el n-símplice $[v_{i_0}, ..., v_{i_n}]$. Entonces se llama *inclusión* a la aplicación simplicial $i : K \to X$ que envía cada vértice v_{i_j} a su vértice correspondiente en X, y por lo tanto envía a K y a todas sus caras a sí mismas dentro de X:

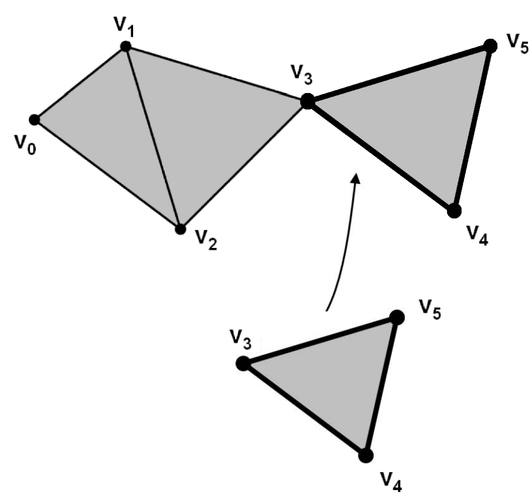

Figura 2: Aplicación simplicial inclusión.

Otro ejemplo interesante es el de las aplicaciones simpliciales que colapsan símplices. Consideremos los complejos simpliciales $[v_0, v_1, v_2], [v_0, v_1]$. Pensemos en una aplicación simplicial continua

$$f : [v_0, v_1, v_2] \to [v_0, v_1]$$

tal que cumpla que $f(v_0) = v_0$, $f(v_1) = f(v_2) = v_1$. Esta aplicación simplicial colapsa un 2-símplice en un 1-símplice.

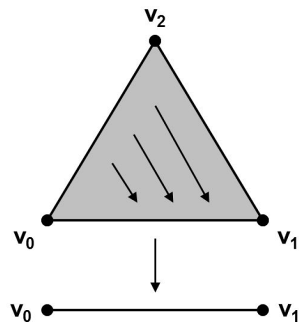

Figura 3: Aplicación simplicial colapso.

Es evidente que las aplicaciones simpliciales entre complejos simpliciales geométricos determinan las aplicaciones simpliciales entre complejos simpliciales abstractos y viceversa. Como comentamos antes, la información combinatorial de complejos simpliciales geométricos y abstractos es la misma, por lo que a partir de aquí omitiremos la palabra “geométrico” o “abstracto”, empleando únicamente “complejo simplicial”.

2.3. Complejos simpliciales ordenados y operadores cara

Definición 2.3.1: Un complejo simplicial X se dice *ordenado* si el conjunto de vértices X^0 es totalmente ordenado. Esto implica que $[v_{i_0}, ..., v_{i_k}]$ tiene sentido únicamente si $v_{i_j} < v_{i_l}$ cuando $j < l$, lo cual no supone ninguna complicación añadida.

El ejemplo de complejo simplicial ordenado más simple es el del n-símplice ordenado, cuya representación para n igual a 0, 1, 2 y 3 es la siguiente:

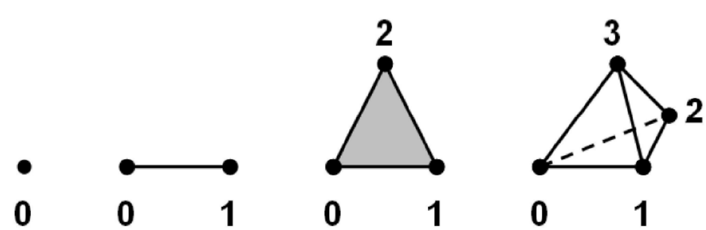

Figura 4: Representación de los primeros n-símplices ordenados.

Denotaremos estos n-símplices ordenados como $|\Delta^n| = [0, ..., n]$, y cuyas k-caras tendrán la forma $[i_0, ..., i_k]$ con $0 \leq i_0 < ... < i_k \leq n$. De este modo, podemos pensar en una aplicación simplicial $f : [0, ..., n] \to [v_{i_0}, ..., v_{i_n}]$ para cada n-símplice $[v_{i_0}, ..., v_{i_n}]$ dentro de un complejo simplicial X tal que f mantiene el orden del símplice.

Definición 2.3.2: Dado un n-símplice $[0, ..., n]$, se llama *operador cara* a cada una de las $n+1$ asignaciones $d_0, ..., d_n$ definidas por

$$d_j[0, ..., n] = [0, ..., j-1, j+1, ..., n]$$

donde j es el elemento omitido. De este modo, cada $d_j[0, ..., n]$ con $j \in \{0, ..., n\}$ representa la j-ésima $(n-1)$-cara del símplice, y de forma recursiva podemos determinar todas las caras de este.

De forma parecida podemos definir los operadores cara de un complejo simplicial X. Para cada n tenemos una colección de asignaciones $d_0^n, ..., d_n^n : X^n \to X^{n-1}$ (o en caso de no existir confusión simplemente $d_0, ..., d_n$) que actúan de forma que si $[v_{i_0}, ..., v_{i_k}] \in X^n$ es un símplice del complejo X, entonces

$$d_j[v_{i_0}, ..., v_{i_k}] = [v_{i_0}, ..., v_{i_{j-1}}, v_{i_{j+1}}, ..., v_{i_k}]$$

Sea, por ejemplo, un complejo simplicial X definido por la siguiente figura (*Figura 5*). Entonces sus operadores cara vendrían representados de este modo:

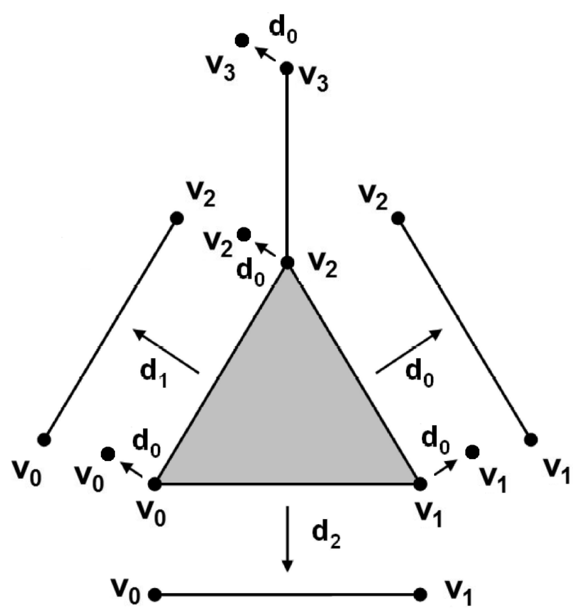

Figura 5: Operadores cara de un complejo simplicial.

Propiedad 2.3.3: Dado un n-símplice $|\Delta^n|$, entonces se cumple que para todo i, j tales que $0 \leq i < j \leq n$ se tiene que

$$d_i d_j = d_{j-1} d_i$$

Por ejemplo, para $|\Delta^2|$, $i = 0, j = 1$ la representación sería la siguiente:

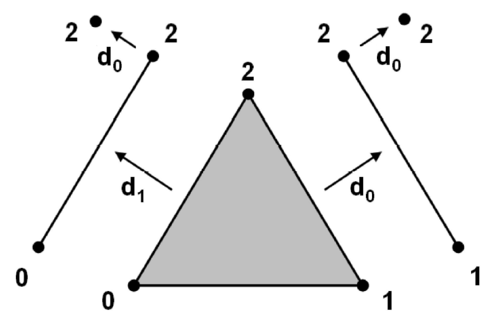

Figura 6: Ejemplo de la fórmula $d_i d_j = d_{j-1} d_i$.

2.4. $\widehat{\Delta}$-conjuntos y $\widehat{\Delta}$-aplicaciones

Con el objetivo de presentar un paso intermedio entre los complejos simpliciales y los conjuntos simpliciales introducimos los $\widehat{\Delta}$-conjuntos, que suponen una abstracción y generalización de la noción de complejo simplicial ordenado junto con sus operadores cara.

Definición 2.4.1: Un $\widehat{\Delta}$-*conjunto*[2] X es una colección de conjuntos $\{X_n\}_{n \geq 0}$ junto con aplicaciones $d_i : X_{n+1} \to X_n$ para cada $n \geq 0$ y para cada i, $0 \leq i \leq n+1$, que cumplen la propiedad $d_i d_j = d_{j-1} d_i$ siempre que $i < j$.

Por ejemplo, partiendo del 2-símplice ordenado $|\Delta^2|$, consideremos el cono topológico obtenido al identificar la arista $[0, 2]$ con la $[1, 2]$, generando un espacio C representado de la siguiente forma:

[2]Seguiremos la terminología $\widehat{\Delta}$-conjunto en lugar de Δ-conjunto (que es la que se emplea en el artículo de *G. Friedman*, [6]) para evitar confusiones en la definición categórica que aportaremos más adelante.

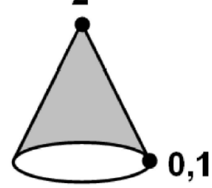

Figura 7: $\widehat{\Delta}$-conjunto obtenido al identificar dos aristas.

Este espacio no es un complejo simplicial, pero sí un $\widehat{\Delta}$-conjunto definido del siguiente modo:

$$C_0 = \{[0] = [1], [2]\}$$
$$C_1 = \{[0,1], [0,2]\}$$
$$C_2 = \{[0,1,2]\}$$
$$C_n = \emptyset, \quad n > 2$$
$$d_2[0,1,2] = [0,1]$$
$$d_0[0,1,2] = d_1[0,1,2] = [0,1] = [1,2]$$
$$d_1[0,1] = d_0[0,1] = [0] = [1]$$

Otro ejemplo de $\widehat{\Delta}$-conjunto es el siguiente:

$$X_0 = \{v_0, v_1\}$$
$$X_1 = \{e_0, e_1\}$$
$$d_0(e_0) = d_0(e_1) = v_0$$
$$d_1(e_0) = d_1(e_1) = v_1$$

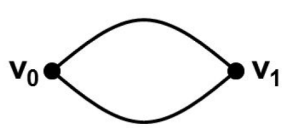

Figura 8: $\widehat{\Delta}$-conjunto formado por dos vértices y dos aristas.

Podemos observar que los $\widehat{\Delta}$-conjuntos nos ofrecen más flexibilidad que los complejos simpliciales, ya que abarcan también los espacios obtenidos al identificar o "pegar" partes de estos. De hecho, una forma intuitiva de pensar en estos $\widehat{\Delta}$-conjuntos es como colecciones de símplices módulo ciertas identificaciones.

Definición 2.4.2: Sean X, Y dos $\widehat{\Delta}$-conjuntos. Se define una $\widehat{\Delta}$-*aplicación* $M : X \to Y$ como una colección de aplicaciones $\{M_n\}_{n \geq 0}$, $M_n : X_n \to Y_n$, tales que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} X_{n+1} \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, "M_{n+1}"'] & X_n \arrow[d, "M_n"] \\ Y_{n+1} \arrow[r, "d_i"] & Y_n \end{tikzcd}$$

es conmutativo para cada $n \geq 0$.

Un ejemplo de $\widehat{\Delta}$-aplicación bastante intuitiva puede ser la transformación natural $\pi : D \to D'$ que va del $\widehat{\Delta}$-conjunto D compuesto por dos 1-símplices que comparten un vértice, $[v_0, v_1], [v_0, v_2]$, al $\widehat{\Delta}$-conjunto D' resultante al identificar $[v_1]$ y $[v_2]$ tal que $\pi(v_1) = \pi(v_2) = v_1$

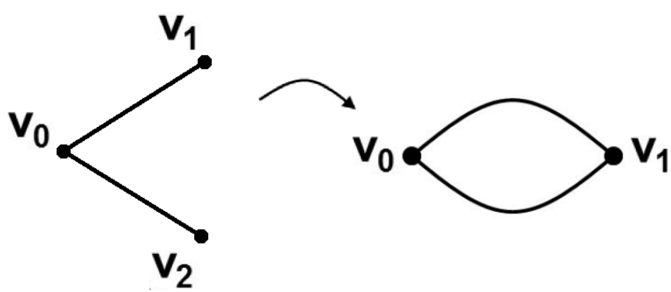

Figura 9: $\widehat{\Delta}$-aplicación.

Podemos observar que el concepto de $\widehat{\Delta}$-aplicación no es tan completo como nos gustaría, ya que, si nos fijamos, no contiene a las aplicaciones simpliciales. Por ejemplo, la aplicación simplicial $f : |\Delta^2| \to |\Delta^1|$ determinada por $f(0) = 0$, $f(1) = f(2) = 1$ no es una $\widehat{\Delta}$-aplicación. Podemos comprobarlo fácilmente al pensar en que el símplice $[0, 1, 2]$ del complejo simplicial $|\Delta^2|$ no es trasladado a ningún elemento de $|\Delta^1|$, ya que no existen 2-símplices en $|\Delta^1|$.

Recordemos ahora la categoría $\widehat{\Delta}$, que era aquella que tenía por objetos todos los ordinales finitos no vacíos $[n]$, $n \geq 0$, y por flechas todas las aplicaciones estrictamente crecientes $f : [m] \to [n]$.

Esta categoría nos servirá para dar una definición categórica de $\widehat{\Delta}$-conjunto. Si consideramos en $\widehat{\Delta}$ las flechas $D_i : [n] \to [n+1]$ definidas mediante la asignación $\{0, ..., n\} \to \{0, ..., i-1, i+1, ..., n+1\}$, entonces en $\widehat{\Delta}^{\mathrm{op}}$ corresponden precisamente a los operadores cara d_i, cumpliendo que $d_i d_j = d_{j-1} d_i$ cuando $i < j$.

Definición categórica 2.4.3: Un $\widehat{\Delta}$-conjunto X es un pre-haz en la categoría $\widehat{\Delta}$, es decir, un funtor

$$X : \widehat{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$$

De acuerdo a esta definición, el funtor X envía cada objeto $[n] \in \widehat{\Delta}$ a un conjunto $X([n]) = X_n$, y cada flecha $D_i : [n] \to [n+1]$ en $\widehat{\Delta}$, $n \geq 0$, $0 \leq i \leq n$, a un operador cara $X(D_i) = d_i : X_{n+1} \to X_n$. Así, cada flecha $f : [m] \to [n]$ en $\widehat{\Delta}$ es enviada a una flecha $X(f) : X_n \to X_m$ que es una composición de operadores cara.

Notemos que podemos definir equivalentemente los $\widehat{\Delta}$-conjuntos como funtores contravariantes

$$X : \widehat{\Delta} \to \mathbf{Set}$$

Pensando en esta definición de $\widehat{\Delta}$-conjunto, podemos observar que una $\widehat{\Delta}$-aplicación $M : X \to Y$ entre dos $\widehat{\Delta}$-conjuntos $X, Y : \widehat{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ es exactamente una transformación natural de X en Y.

2.5. La categoría de los conjuntos simpliciales

El concepto de conjunto simplicial va un paso más allá que los $\widehat{\Delta}$-conjuntos, considerando lo que definiremos como símplices degenerados. Del mismo modo que con los $\widehat{\Delta}$-conjuntos, aportaremos una definición categórica de conjunto simplicial que seguirá un proceso análogo a la de $\widehat{\Delta}$-conjunto.

Intuición inicial: Dada una aplicación simplicial $\pi : |\Delta^m| \to |\Delta^n|$ con $m > n$, se dice que la imagen $\pi(|\Delta^m|)$ es un *símplice degenerado* cuando "colapsa" dos o más vértices del símplice $|\Delta^m|$.

Por ejemplo, sea una aplicación simplicial $\pi : |\Delta^2| \to |\Delta^1|$ tal que $\pi(0) = 0$, $\pi(1) = \pi(2) = 1$. Entonces la imagen $\pi(|\Delta^2|) = \pi([0, 1, 2]) = [0, 1, 1]$ es un símplice degenerado.

El j-ésimo *operador degeneración* s_j es aquel que asigna a cada n-símplice el j-ésimo $(n+1)$-símplice degenerado, es decir,

$$s_j[0, ..., n] = [0, ..., j, j, ..., n]$$

La siguiente figura representa todos los 1-símplices en $|\Delta^2|$, incluyendo los 1-símplices degenerados asociados a vértices individuales:

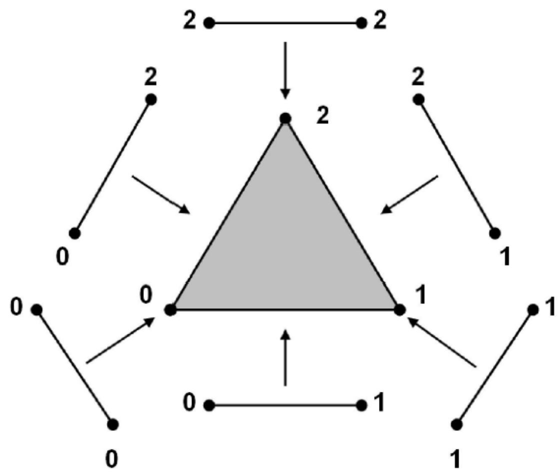

Figura 10: 1-símplices en $|\Delta^2|$.

Desde una perspectiva geométrica, podemos pensar en $s_j|\Delta^n|$ como el proceso de "colapsar" $|\Delta^{n+1}|$ obteniendo $|\Delta^n|$ mediante la aplicación simplicial π_j definida por

$$\pi_j(i) = \begin{cases} i & \text{si } i < j \\ j & \text{si } i = j, j+1 \\ i-1 & \text{si } i > j+1 \end{cases}$$

Podemos observar que cualquier símplice degenerado puede ser obtenido de la composición de operadores degeneración aplicada a un símplice (ordinario), del mismo modo que cualquier cara de un símplice puede ser obtenida mediante la composición de varios operadores cara.

La siguiente figura representa todos los 2-símplices degenerados en $|\Delta^2|$:

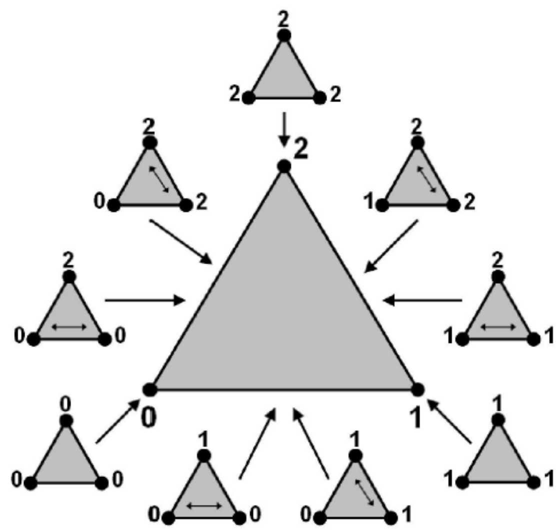

Figura 11: 2-símplices en $|\Delta^2|$.

Existen ciertas relaciones evidentes entre los operadores cara y los operadores degeneración anteriores:

$$d_i s_j = s_{j-1} d_i \quad \text{si } i < j$$

$$d_j s_j = d_{j+1} s_j = id$$

$$d_i s_j = s_j d_{i-1} \quad \text{si } i > j+1$$

Notemos que la segunda fórmula considera los casos $i = j$ e $i = j+1$.

Estas relaciones son sencillas de probar. Por ejemplo, si $i < j$ se tiene que

$$d_i s_j[0, ..., n] = [0, ..., i-1, i+1, ..., j, j, ..., n] = s_{j-1} d_i[0, ..., n]$$

Si $i > j+1$ se tiene que

$$d_i s_j[0, ..., n] = [0, ..., j, j, ..., i-1, i+1, ..., n] = s_j d_{i-1}[0, ..., n]$$

Además,

$$d_j s_j[0, ..., n] = d_j[0, ..., j, j, ..., n] = [0, ..., n] =$$
$$d_{j+1}[0, ..., j, j, ..., n] = d_{j+1} s_j[0, ..., n]$$

Analizadas las propiedades de los operadores cara y degeneración para el caso básico de los símplices, podemos considerar la definición de conjunto simplicial que daremos a continuación, y que recoge las propiedades mencionadas.

Definición 2.5.1: Se llama *conjunto simplicial* X a una colección de conjuntos $\{X_n\}_{n\geq 0}$ junto con aplicaciones $d_i : X_n \to X_{n-1}$ y $s_i : X_n \to X_{n+1}$ para cada $n \geq 0$ y para cada i, $0 \leq i \leq n$, tales que cumplen las siguientes igualdades:

$$d_i d_j = d_{j-1} d_i \quad \text{si } i < j$$

$$d_i s_j = s_{j-1} d_i \quad \text{si } i < j$$

$$d_j s_j = d_{j+1} s_j = id$$

$$d_i s_j = s_j d_{i-1} \quad \text{si } i > j+1$$

$$s_i s_j = s_{j+1} s_i \quad \text{si } i \leq j$$

A los elementos de X_n se les llama *n-símplices*, y a las aplicaciones d_i y s_i se les llama *operadores cara y degeneración* respectivamente. Además, se dice que un símplice $x \in X_n$ es *degenerado* si existe un símplice $y \in X_{n-1}$ y un operador degeneración $s_i : X_{n-1} \to X_n$ tal que $s_i(y) = x$. En caso contrario, se dice que x es *no degenerado*.

Proposición 2.5.3: Dado un símplice degenerado cualquiera z, existe un único símplice no degenerado x tal que $z = s_{i_1}...s_{i_k}x$ para una colección de operadores degeneración $s_{i_1},...,s_{i_k}$.

Demostración: Sabemos que $z = s_{i_1}x_1$ para algún símplice x_1 y algún operador degeneración s_{i_1}. En caso de que x sea degenerado, podemos repetir el proceso hasta que $z = s_{i_1}...s_{i_k}x_k$ con x_k no degenerado. Este proceso tendrá que terminar debido a que cada x_j tiene una dimensión menor que x_{j-1} y no existen símplices degenerados de dimensión 0.

Ahora, supongamos que x, y son dos símplices no degenerados (de dimensiones no necesariamente iguales) tal que $Sx = Ty$ con S, T composiciones de operadores degeneración. Si $S = s_{i_1}...s_{i_k}$, definimos D como $D = d_{i_k}...d_{i_1}$. Entonces $x = DSx = DTy$. Basándonos en las igualdades de los operadores de los conjuntos simpliciales tenemos que $x = \tilde{T}\tilde{D}y$ para alguna composición de operadores cara $\tilde{D}$ y para alguna composición de operadores degeneración $\tilde{T}$. Pero como por hipótesis x es no degenerado, $\tilde{T}$ debe ser el operador identidad, y por tanto $x = \tilde{D}y$, es decir, x es una cara de y. Pero podemos repetir el argumento cambiando x por y y viceversa, obteniendo que y es a su vez una cara de x. Luego x e y son necesariamente iguales.

$\square$

Pongamos un ejemplo: Sea X un complejo simplicial ordenado. Entonces tenemos un conjunto simplicial $\tilde{X}$ tal que los $\tilde{X}_n$ están formados por todos los símplices $[v_{i_0},...,v_{i_n}]$ con $v_{i_k} \leq v_{i_{k+1}}$ (notemos que los vértices no tienen por qué ser distintos) y tales que $\{v_{i_0},...,v_{i_n}\}$ generan un símplice de X. Los operadores d_i y s_i se definen como los operadores cara y operadores degeneración evidentes.

No obstante, debemos tener en cuenta que no todos los conjuntos simpliciales están formados a partir de complejos simpliciales.

Definición 2.5.4: Sean X, Z dos conjuntos simpliciales. Se llama *morfismo simplicial* $f : X \to Z$ a una colección de morfismos $\{f_n\}_{n\geq 0}$, $f_n : X_n \to Z_n$, tales que los siguientes diagramas

$$\begin{tikzcd} X_{n+1} \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, "f_{n+1}"'] & X_n \arrow[d, "f_n"] \\ Z_{n+1} \arrow[r, "d_i"] & Z_n \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_n \arrow[r, "s_i"] \arrow[d, "f_n"'] & X_{n+1} \arrow[d, "f_{n+1}"] \\ Z_n \arrow[r, "s_i"] & Z_{n+1} \end{tikzcd}$$

son conmutativos.

Si recordamos la definición categórica de los $\widehat{\Delta}$-conjuntos, empleamos la categoría $\widehat{\Delta}$ en lugar de la categoría simplicial Δ, que era aquella que tenía por objetos todos los ordinales finitos no vacíos $[n]$, $n \geq 0$, y por flechas todas las aplicaciones crecientes $f : [m] \to [n]$. Esto se debía a que necesitábamos que las flechas de la categoría $\widehat{\Delta}$ representaran únicamente las inclusiones de los símplices (contemplando solo los operadores cara). Pensando ahora en contemplar también las degeneraciones, es natural pensar en la categoría simplicial Δ como la indicada para la definición categórica de conjunto simplicial.

Por ejemplo, la flecha $f \in \mathrm{Hom}_\Delta([3], [2])$ definida por $f(0) = 0$, $f(i) = i - 1, i \in \{1, 2, 3\}$ puede ser pensada como un operador que toma el 3-símplice y lo degenera en un 2-símplice.

Para dar una definición categórica de conjunto simplicial, debemos considerar cómo hemos intuido la categoría Δ^{op}.

Notemos que en la categoría Δ existen los siguientes morfismos especiales: El *operador incrustación* $D_i : [n-1] \to [n]$ dado por $D_i(j) = j$ si $j < i$ y $D_i(j) = j + 1$ si $j \geq i$ y el *operador colapso* $S_i : [n+1] \to [n]$ dado por $S_i(j) = j$ si $j \leq i$ y $S_i(j) = j - 1$ si $j > i$. Notemos que cualquier otro morfismo $f : [m] \to [n]$ en Δ es una composición de estos.

La siguiente figura puede ayudarnos a visualizar los operadores D_i, d_i, S_i y s_i para el caso particular de un 2-símplice. Las figuras de la izquierda representan los morfismos en la categoría Δ, y las de la derecha representan los inducidos en los correspondientes conjuntos simpliciales:

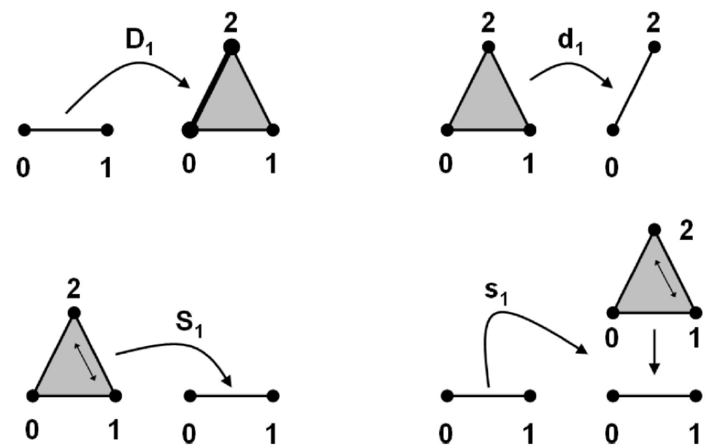

Figura 15: Operadores D_i, d_i, S_i y s_i para un 2-símplice.

Definición categórica 2.5.5: Un conjunto simplicial X es un pre-haz en la categoría Δ, es decir, un funtor

$$X : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$$

Notemos que podemos definir equivalentemente los conjuntos simpliciales como funtores contravariantes

$$X : \Delta \to \mathbf{Set}$$

Observemos que la definición categórica de conjunto simplicial es análoga a la definición categórica de $\widehat{\Delta}$-conjunto sustituyendo $\widehat{\Delta}$ por Δ.

Pensando en esta definición de conjunto simplicial, podemos observar que un morfismo simplicial $f : X \to Z$ entre dos conjuntos simpliciales $X, Z : \Delta^{\mathrm{op}} \to$ **Set** es exactamente una transformación natural de X en Z.

Definición 2.5.6: La categoría **S** es aquella que tiene por objetos todos los conjuntos simpliciales y por flechas todos los morfismos simpliciales. Es decir, es la categoría $\mathbf{Set}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$.

Notemos que el funtor inclusión $I_\Delta : \widehat{\Delta} \to \Delta$ induce por la *Proposición 1.3.8* un funtor de la categoría de los conjuntos simpliciales a la categoría de los $\widehat{\Delta}$-conjuntos

$$I_\Delta^* : \mathbf{Set}^{\Delta^{\mathrm{op}}} = \mathbf{S} \to \mathbf{Set}^{\widehat{\Delta}^{\mathrm{op}}}$$

que es un funtor de olvido.

Capítulo 3

Funtores singular y realización y adjunción entre ellos

En este capítulo se analizará la relación entre los conjuntos simpliciales y los espacios topológicos, es decir, entre las categorías **Top** y $\mathbf{S} = \mathbf{Set}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$. Dicha relación vendrá dada por los funtores singular y realización que describiremos a continuación.

3.1. Funtores singular y realización

Definición 3.1.1: Se llama *n-símplice geométrico estándar en* $\mathbb{R}^{n+1}$ al el espacio topológico

$$\Delta_n = \{(t_0, ..., t_n) \,|\, 0 \leq t_i \leq 1, \sum_{i=0}^{n} t_i = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

con la topología usual. Podemos observar que el espacio topológico subyacente de los $|\Delta^n|$ definidos anteriormente es homeomorfo al de los Δ_n.

Utilizaremos estos n-símplices geométricos estándar Δ_n para establecer una relación entre la categoría de espacios topológicos **Top** y la categoría de los conjuntos simpliciales **S**.

Definición 3.1.2: Sea Y un espacio topológico. El *conjunto singular* de Y, al que denotaremos por $\mathcal{S}(Y)$, es el conjunto simplicial que consiste en la colección $\{\mathcal{S}(Y)_n\}_{n\geq 0}$ dada por:

$$\mathcal{S}(Y)_n = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta_n, Y) = \{\sigma : \Delta_n \to Y \,|\, \sigma \text{ es una aplicación continua}\}$$

junto con los operadores cara y degeneración definidos por:

$$\begin{aligned} d_i : \mathcal{S}(Y)_n &\to \mathcal{S}(Y)_{n-1} \\ f &\mapsto d_i(f) \end{aligned}$$

con $d_i(f) : \Delta_{n-1} \to Y$ definida por $(d_i(f))(t_0, ..., t_{n-1}) = f(t_0, ..., t_{i-1}, 0, t_i, ..., t_{n-1})$.

$$\begin{aligned} s_i : \mathcal{S}(Y)_n &\to \mathcal{S}(Y)_{n+1} \\ f &\mapsto s_i(f) \end{aligned}$$

con $s_i(f) : \Delta_{n+1} \to Y$ definida por $(s_i(f))(t_0, ..., t_{n+1}) = f(t_0, ..., t_{i-1}, t_i + t_{i+1}, t_{i+2}, ..., t_{n+1})$.

Notemos que podemos definir estos operadores mediante $d_i(f) = f \circ D_i$ y $s_i(f) = f \circ S_i$, donde las aplicaciones incrustación y colapso para símplices geométricos estándar son:

$$\begin{aligned} D_i : \Delta_{n-1} &\to \Delta_n \\ (t_0, ..., t_{n-1}) &\mapsto (t_0, ..., t_{i-1}, 0, t_i, ..., t_{n-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_i : \Delta_{n+1} &\to \Delta_n \\ (t_0, ..., t_{n+1}) &\mapsto (t_0, ..., t_{i-1}, t_i + t_{i+1}, t_{i+2}, ..., t_{n+1}) \end{aligned}$$

Pensando en la definición categórica que dimos anteriormente para los conjuntos simpliciales, el conjunto singular $\mathcal{S}(Y)$ es el funtor $\mathcal{S}(Y) : \Delta^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ que asigna a cada $[n] \in \Delta$ el conjunto $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta_n, Y)$, y cumple para los operadores cara y degeneración las siguientes correspondencias:

$$\begin{tikzcd}
{[n]} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta_n, Y) \arrow[d, "d_i"] \\
{[n-1]} \arrow[u, "D_i"] \arrow[ur, phantom, "\Longrightarrow"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta_{n-1}, Y)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{[n]} & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta_n, Y) \arrow[d, "s_i"] \\
{[n+1]} \arrow[u, "S_i"] \arrow[ur, phantom, "\Longrightarrow"] & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta_{n+1}, Y)
\end{tikzcd}$$

Definición 3.1.3: Se llama *funtor singular* al funtor

$$\mathcal{S} : \mathbf{Top} \to \mathbf{S}$$

que asigna a cada espacio topológico Y el conjunto singular $\mathcal{S}(Y)$ y a cada aplicación continua $f : Y \to Y'$ el morfismo (*singular*) $\mathcal{S}(f) : \mathcal{S}(Y) \to \mathcal{S}(Y')$, que es aquel que envía cada $\sigma_Y : \Delta_n \to Y$ al $\sigma_{Y'} : \Delta_n \to Y'$ que hace que el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[d, "f"] \\
\Delta_n \arrow[ur, "\sigma_Y"] \arrow[r, "\sigma_{Y'}"'] & Y'
\end{tikzcd}
$$

sea conmutativo.

El proceso que hemos seguido con la definición del funtor singular puede pensarse como una vía desde la geometría/topología hasta la combinatoria. De forma inversa, podemos obtener objetos geométricos/topológicos a partir de conjuntos simpliciales. Esto es lo que se hará a continuación al definir el funtor realización.

Definición 3.1.4: Sea X un conjunto simplicial. Consideremos para cada X_n la topología discreta. Sea $\overline{X}$ la unión disjunta:

$$\overline{X} = \coprod_{n=0}^{\infty} (X_n \times \Delta_n)$$

Consideremos en $\overline{X}$ la relación de equivalencia $\sim$ dada por las siguientes identificaciones:

$$(d_i x, p) \sim (x, D_i p) \text{ para cada } x \in X_n, p \in \Delta_{n-1}$$
$$(s_i x, p) \sim (x, S_i p) \text{ para cada } x \in X_n, p \in \Delta_{n+1}$$

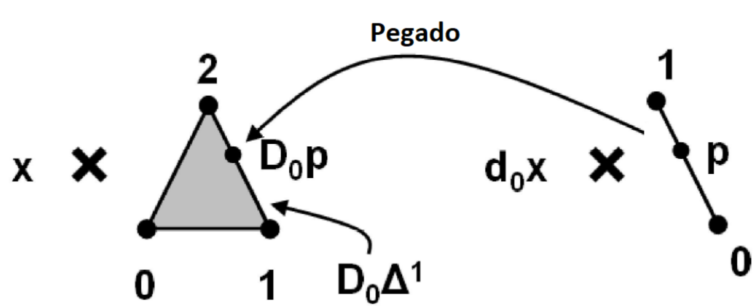

Figura 16: Identificación $(x, D_0(p)) \sim (d_0(x), p)$.

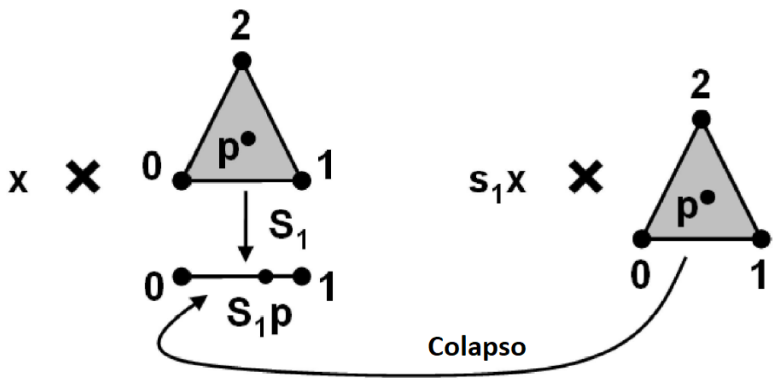

Figura 17: Identificación $(x, S_1(p)) \sim (s_1(x), p)$.

Al espacio cociente $\overline{X}/\sim$ se le llama *realización (geométrica)* de X y se le denota por $|X|$, y a la clase de equivalencia de $(x, p) \in X_n \times \Delta_n$ en $|X|$ se le denotará por $|x, p|$.

Pongamos un ejemplo sencillo: Sea X el 0-símplice pensado como conjunto simplicial. X tiene un único 0-símplice no degenerado $[0]$ y un n-símplice degenerado $[0, ..., 0]$ en cada dimensión $n \geq 0$, por lo que tenemos que su realización geométrica es

$$|X| = \coprod_{n=0}^{\infty} ([0, ..., 0] \times \Delta_n)/\sim = \coprod_{n=0}^{\infty} \Delta_n/\sim$$

De este modo, en dimensión 0 tenemos un vértice v, y, como consecuencia de $([0], p) = ([0], v) \sim ([0, 0], p)$, en la dimensión n para cualquier $n > 0$ tenemos el Δ_n colapsado en el vértice v. De modo que $|X| = \{v\}$.

Definición 3.1.5: Se llama *funtor realización* al funtor

$$|\cdot| : \mathbf{S} \to \mathbf{Top}$$

que asigna a cada conjunto simplicial $X \in \mathbf{S}$ la realización $|X|$ y a cada morfismo simplicial $f : X \to X'$ la aplicación continua $|f| : |X| \to |X'|$ dada por

$$|f|(|x, p|) = |f(x), p|$$

Una de las propiedades interesantes sobre el funtor realización es que, dado un conjunto simplicial X, su realización $|X|$ tiene una estructura de CW-complejo. Recordamos a continuación la definición de CW-complejo:

Dado un espacio topológico Y, se dice que $(Y, \mathcal{E})$ es una *descomposición celular* de Y si $\mathcal{E}$ es una partición de Y en células, es decir, si $\mathcal{E}$ es una división de Y en subconjuntos disjuntos no vacíos tal que cada subconjunto es homeomorfo a algún espacio euclídeo real $\mathbb{R}^n$ para algún $n \geq 0$.

Sea $(Y, \mathcal{E})$ una descomposición celular. Se dice que $(Y, \mathcal{E})$ es un *complejo celular* o *CW-complejo (Closure finite - Weak topology)* si cumple además las siguientes condiciones:

- *Condición de la aplicación característica:* Para cada célula $e \in \mathcal{E}$ existe una función continua (*aplicación característica de* e) $\Phi_e : \overline{B}^n \to Y$ tal que $\Phi_e|_{B^n}$ es un homeomorfismo entre B^n y e, y además $\Phi_e(S^{n-1}) \subset Y^{n-1}$. A $\Phi_e|_{S^{n-1}}$ se le llama *aplicación de pegado de* e.[1]

- *Condición de clausura finita:* Dada una célula $e \in \mathcal{E}$, su clausura $\overline{e}$ está contenida en la unión de un número finito de células.

- *Condición de topología débil:* Un conjunto $F \subset Y$ es cerrado si y solo si para toda célula $e \in \mathcal{E}$ se cumple que $F \cap \overline{e}$ es cerrado en $\overline{e}$.

Se llama *n-esqueleto* de un complejo celular $(Y, \mathcal{E})$ al subespacio Y^n de Y formado por la unión de las n-células de $(Y, \mathcal{E})$.

Para un estudio profundo de las propiedades de los CW-complejos, puede verse [9].

P. May explicita en [10] cómo es la estructura celular inducida en la realización $|X|$ de un conjunto simplicial X:

Proposición 3.1.6: Sea X un conjunto simplicial. Entonces su realización $|X|$ es un CW-complejo que tiene una n-célula por cada n-símplice no degenerado de X.

3.2. Adjunción entre los funtores singular y realización

Enunciamos a continuación el teorema que expresa el objetivo principal de este trabajo:

Teorema 3.2.1: El funtor realización $|\cdot| : \mathbf{S} \to \mathbf{Top}$ es adjunto a izquierda del funtor singular $\mathcal{S} : \mathbf{Top} \to \mathbf{S}$.

Demostración: Sean $X \in \mathbf{S}, Y \in \mathbf{Top}$. Debemos probar que

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(|X|, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(X, \mathcal{S}(Y))$$

[1] Hemos considerado las siguientes definiciones: $\overline{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| \leq 1\}$, $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| < 1\}$ y $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| = 1\}$.

Para ello, consideremos las siguientes aplicaciones:

- Definimos $\psi : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(|X|, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(X, \mathcal{S}(Y))$ del siguiente modo:

  Sea $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(|X|, Y)$, es decir, $g : |X| \to Y$ continua. Entonces $\psi(g) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(X, \mathcal{S}(Y))$ es el morfismo simplicial $\psi(g) : X \to \mathcal{S}(Y)$ dado para cada $n \geq 0$ por

$$\begin{aligned} \psi(g) : X_n &\to \mathcal{S}(Y)_n = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta_n, Y) \\ x &\mapsto (\psi(g))(x) \end{aligned}$$

  con

$$\begin{aligned} (\psi(g))(x) : \Delta_n &\to Y \\ p &\mapsto ((\psi(g))(x))(p) = g(|x, p|) \end{aligned}$$

- Definimos $\phi : \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(X, \mathcal{S}(Y)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(|X|, Y)$ del siguiente modo:

  Sea $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(X, \mathcal{S}(Y))$, es decir, $f : X \to \mathcal{S}(Y)$ morfismo simplicial, dado para cada $n \geq 0$ por

$$\begin{aligned} f : X_n &\to \mathcal{S}(Y)_n = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta_n, Y) \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

  con

$$\begin{aligned} f(x) : \Delta_n &\to Y \\ p &\mapsto (f(x))(p) \end{aligned}$$

  Entonces $\phi(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(|X|, Y)$ es la función continua

$$\begin{aligned} \phi(f) : |X| &\to Y \\ |x, p| &\mapsto \phi(f)(|x, p|) = (f(x))(p) \end{aligned}$$

Comprobemos que $\psi \circ \phi = 1$ y que $\phi \circ \psi = 1$:

- $\psi \circ \phi = 1$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(X, \mathcal{S}(Y)) \xrightarrow{\phi} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(|X|, Y) \xrightarrow{\psi} \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(X, \mathcal{S}(Y))$$

  Para cada $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(X, \mathcal{S}(Y))$, dado para cada $n \geq 0$ por

$$\begin{aligned} f : X_n &\to \mathcal{S}(Y)_n = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta_n, Y) \\ x &\mapsto f(x) : \Delta_n \to Y \end{aligned}$$

  se tiene que $(\psi \circ \phi)(f) = f$, puesto que $\forall x \in X_n$, $(\psi(\phi(f)))(x) : \Delta_n \to Y$ es $f(x)$, ya que $\forall p \in \Delta_n$, $((\psi(\phi(f)))(x))(p) = (\phi(f))(|x, p|)$ por definición de ψ, y $(\phi(f))(|x, p|) = (f(x))(p)$ por definición de $\phi(f)$.

- $\phi \circ \psi = 1$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(|X|, Y) \xrightarrow{\psi} \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(X, \mathcal{S}(Y)) \xrightarrow{\phi} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(|X|, Y)$$

  Para cada $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(|X|, Y)$ se tiene que $(\phi \circ \psi)(g) = g$, puesto que $\forall |x,p| \in |X|$ $((x,p) \in X_n \times \Delta_n)$ $(\phi(\psi(g)))(|x,p|) = ((\psi(g))(x))(p)$ por definición de ϕ, y $((\psi(g))(x))(p) = g(|x,p|)$ por definición de $\psi(g)$.

$\square$

Observación 3.2.2: Las biyecciones naturales

$$\psi : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(|X|, Y) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(X, \mathcal{S}(Y))$$
$$\phi : \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(X, \mathcal{S}(Y)) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(|X|, Y)$$

se corresponden con las transformaciones naturales:

- $\Psi : 1_{\mathbf{S}} \to \mathcal{S} \circ |\cdot|$ definida del siguiente modo:

  Sea $X \in \mathbf{S}$, entonces $\Psi(X) = \psi(1_{|X|}) : X \to (\mathcal{S} \circ |\cdot|)(X) = \mathcal{S}(|X|)$ tal que, dado un $Y \in \mathbf{Top}$, si $g \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(|X|, Y)$, tenemos que $\psi(g) = \mathcal{S}(g) \circ \Psi(X)$ y el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{S}(Y) & \\ X \arrow[ur, "\psi(g)"] \arrow[rr, "\Psi(X)"'] & & \mathcal{S}(|X|) = (\mathcal{S} \circ |\cdot|)(X) \arrow[ul, "\mathcal{S}(g)"'] \end{tikzcd}$$

  es conmutativo.

- $\Phi : |\cdot| \circ \mathcal{S} \to 1_{\mathbf{Top}}$ definida del siguiente modo:

  Sea $Y \in \mathbf{Top}$, entonces $\Phi(Y) = \phi(1_{\mathcal{S}}) : (|\cdot| \circ \mathcal{S})(Y) = |\mathcal{S}(Y)| \to Y$ tal que, dado un $X \in \mathbf{S}$, si $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}}(X, \mathcal{S}(Y))$, tenemos que $\phi(f) = \Phi(Y) \circ |f|$ y el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & |X| \arrow[dl, "|f|"'] \arrow[dr, "\phi(f)"] & \\ |\mathcal{S}(Y)| = (|\cdot| \circ \mathcal{S})(Y) \arrow[rr, "\Phi(Y)"'] & & Y \end{tikzcd}$$

  es conmutativo.

Estas transformaciones naturales Ψ y Φ son la unidad y la counidad respectivamente, y verifican que:

- $\mathcal{S} \xrightarrow{\Psi\mathcal{S}} \mathcal{S}|\cdot|\mathcal{S} \xrightarrow{\mathcal{S}\Phi} \mathcal{S}$ es la transformación natural $1_{\mathcal{S}}$.

- $|\cdot| \xrightarrow{|\cdot|\Psi} |\cdot|\mathcal{S}|\cdot| \xrightarrow{\Phi|\cdot|} |\cdot|$ es la transformación natural $1_{|\cdot|}$.

3.3. Otra visión sobre la adjunción entre los funtores singular y realización

En el libro de *S. Mac Lane* e *I. Moerdijk*, [8], figura un teorema (al que llamaremos teorema de Mac Lane - Moerdijk) que emplearemos para dar una visión alternativa de la adjunción entre los funtores singular y realización.

Definición 3.3.1: Sea C una categoría pequeña. Sea un pre-haz $P \in \mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}$. Se define la *categoría de Grothendieck de* P o *categoría de los elementos de* P y se denota por

$$\int_C P$$

como aquella que tiene por objetos todos los pares (c, p) donde c es un objeto de C y p es un elemento de $P(c)$, y por flechas $\tilde{u} : (c', p') \to (c, p)$ aquellas flechas $u : c' \to c$ en C tales que el funtor $P(u)$ envía $p \in P(c)$ a $p' \in P(c')$, es decir, $P(u)(p) = p'$. La composición de estas flechas se obtiene de la composición de las flechas $u \in C$.

Notemos que existe un funtor proyección

$$\pi_P : \int_C P \to C$$

que envía (c, p) a c y $\tilde{u}$ a u.

Teorema de Mac Lane - Moerdijk (3.3.2): Sea $A : C \to \mathcal{E}$ un funtor que va desde una categoría pequeña C a una categoría cocompleta $\mathcal{E}$.

Entonces, el funtor

$$R : \mathcal{E} \to \mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}$$

dado por $R(e)(c) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(A(c), e)$ tiene un adjunto a izquierda

$$L : \mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}} \to \mathcal{E}$$

definido para cada pre-haz $P \in \mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}$ como el colímite

$$L(P) = \mathrm{Colim}(\ \int_C P \xrightarrow{\pi_P} C \xrightarrow{A} \mathcal{E}\ )$$

con $\pi_P : \int_C P \to C$ el funtor proyección.

Es decir, existe un par de funtores adjuntos $L \dashv R$ dados por el siguiente diagrama

$$L : \mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}} \leftrightarrows \mathcal{E} : R$$

Demostración Una idea esquemática de la demostración del teorema es la siguiente:

Una transformación natural $\tau : P \to R(e)$ es una familia $\{\tau_c\}_{c\in C}$ tal que cada τ_c es una aplicación

$$\tau_c : P(c) \to R(e)(c) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(A(c), e)$$

que es natural para c, es decir, que para cada flecha $u : c \to c'$ en C^{op} ($u : c' \to c$ en C), se tiene que el siguiente diagrama en **Set**

$$\begin{tikzcd}
P(c) \arrow[r, "\tau_c"] \arrow[d, "P(u)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(A(c), e) \arrow[d, "A(u)^*"] \\
P(c') \arrow[r, "\tau_{c'}"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(A(c'), e)
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Notemos que τ también puede ser considerada como una familia de flechas de $\mathcal{E}$

$$\{\tau_c(p) : A(c) \to e\}_{(c,p)\in \int_C P}$$

En este sentido, por el diagrama anterior, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A(c) \arrow[r, equal] \arrow[d, "A(u)"'] & A\pi_P(c,p) \arrow[d, "u_*"] \arrow[dr, "\tau_c(p)"] & \\
 & & e \\
A(c') \arrow[r, equal] & A\pi_P(c',p') \arrow[ur, "\tau_c'(p')"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta para cada flecha u.

Esto significa que las flechas $\tau_c(p)$ constituyen un cocono desde el funtor $A \circ \pi_P$ al objeto e. Por la definición de colímite, cada cocono viene dado por la composición del cocono colímite con una flecha única que va desde el colímite $L(P)$ al objeto e.

De este modo, existe una biyección

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^{C^{\mathrm{op}}}}(P, R(e)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{E}}(L(P), e)$$

y este hecho asegura que L es un adjunto a izquierda de R, como queríamos probar.

$\square$

Corolario 3.3.3: En las condiciones del teorema de Mac Lane - Moerdijk, si consideramos $\mathcal{E} = \mathbf{Set}^{C^{\text{op}}}$ y $A = y : C \to \mathbf{Set}^{C^{\text{op}}}$ el embebimiento de Yoneda, se obtiene que el funtor

$$R : \mathbf{Set}^{C^{\text{op}}} \to \mathbf{Set}^{C^{\text{op}}},$$

dado por $R(e)(c) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^{C^{\text{op}}}}(y(c), e) \cong e(c)$ (por aplicar el lema de Yoneda (1.3.6)) es naturalmente isomorfo a $1_{\mathbf{Set}^{C^{\text{op}}}}$.

Además, debido a la unicidad (salvo isomorfismo natural) de la adjunción, su adjunto a izquierda

$$L : \mathbf{Set}^{C^{\text{op}}} \to \mathbf{Set}^{C^{\text{op}}}$$

dado por $L(P) = \mathrm{Colim}(y \circ \pi_P)$ debe ser naturalmente isomorfo a $1_{\mathbf{Set}^{C^{\text{op}}}}$, y por tanto:

$$\forall P \in \mathbf{Set}^{C^{\text{op}}}, \qquad P \cong \mathrm{Colim}(\ \textstyle\int_C P \xrightarrow{\pi_P} C \xrightarrow{y} \mathbf{Set}^{C^{\text{op}}}\ )$$

lo que implica que todo pre-haz $P \in \mathbf{Set}^{C^{\text{op}}}$ es colímite de pre-haces representables.

Pensándolo de forma intuitiva, este corolario, aplicado a la categoría $\mathbf{S}$ (es decir, con $C = \Delta$), nos asegura que un conjunto simplicial se puede fabricar "pegando" adecuadamente muchos símplices copias de $y([n])$ para distintas dimensiones n.

Aplicación para los funtores singular y realización (3.3.4): Consideremos ahora en el enunciado del teorema de Mac Lane - Moerdijk:

$$C = \Delta, \qquad \mathcal{E} = \mathbf{Top}, \qquad A : \Delta \to \mathbf{Top}$$

con A dado por

$$A([n]) = \Delta_n$$
$$D_i : [n-1] \to [n],\ A(D_i) = D_i : \Delta_{n-1} \to \Delta_n$$
$$S_i : [n+1] \to [n],\ A(S_i) = S_i : \Delta_{n+1} \to \Delta_n$$

Notemos que Δ es una categoría pequeña y $\mathbf{Top}$ una categoría cocompleta.

Entonces, tenemos un funtor inducido

$$R : \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}^{\Delta^{\text{op}}}$$

que a cada objeto Y de $\mathbf{Top}$ le asocia el conjunto simplicial $R(Y) \in \mathbf{Set}^{\Delta^{\text{op}}}$ dado por:

$$R(Y)_n = R(Y)([n]) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(A([n]), Y) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Top}}(\Delta_n, Y) = \mathcal{S}(Y)_n$$

lo que implica que

$$R(Y) = \mathcal{S}(Y)$$

luego

$$R = \mathcal{S}$$

es el funtor singular.

Además, el funtor $R = \mathcal{S}$ tiene el funtor adjunto a izquierda

$$L : \mathbf{Set}^{\Delta^{\mathrm{op}}} \to \mathbf{Top},$$

que a cada $X \in \mathbf{Set}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$ le asocia el espacio topológico

$$L(X) = \mathrm{Colim}(\ \textstyle\int_\Delta X \xrightarrow{\pi_X} \Delta \xrightarrow{A} \mathbf{Top}\ )$$

Interpretemos este colímite en **Top**:

La categoría de los elementos de X en Δ es aquella que tiene por objetos los $([n], x)$ con $[n] \in \mathrm{Ob}(\Delta)$, $x \in X_n = X([n])$, y por flechas las $\tilde{u} : ([m], x') \to ([n], x)$ que son aquellas flechas $u : [m] \to [n]$ en Δ tal que $X(u) : X_n \to X_m$ envía x a x'.

Entonces los morfismos inducidos por los morfismos "esenciales" en Δ son:

$$D_i : [n-1] \to [n] \text{ provoca para cada } x \in X_n \text{ la flecha}$$
$$\tilde{D}_i : (x, [n]) \to (d_i(x), [n-1]) \text{ en } \int_\Delta X$$
$$S_i : [n+1] \to [n] \text{ provoca para cada } x \in X_n \text{ la flecha}$$
$$\tilde{S}_i : (x, [n]) \to (s_i(x), [n+1]) \text{ en } \int_\Delta X$$

De este modo tenemos para cada $X \in \mathbf{Set}^{\Delta^{\mathrm{op}}}$ el funtor composición:

$$\textstyle\int_\Delta X \xrightarrow{\pi_X} \Delta \xrightarrow{A} \mathbf{Top}$$
$$([n], x) \longmapsto [n] \longmapsto \Delta_n$$

Pensemos ahora en el diagrama en **Top** provocado por el funtor anterior: Para cada objeto $(x, [n]) \in \int_\Delta X$ se tiene el espacio topológico $\{x\} \times \Delta_n \cong \Delta_n$.

Consideremos ahora

$$\coprod_{n\geq 0,\, x\in X_n} (\{x\}\times\Delta_n) = \coprod_{n\geq 0} (X_n\times\Delta_n) = \overline{X}$$

tomando en cada X_n la topología discreta, y las aplicaciones

$$l_x : \{x\}\times\Delta_n \to \overline{X},$$

para cada $n\geq 0$ y $x\in X_n$.

Para el diagrama asociado

$$\begin{tikzcd}
\{x\}\times\Delta_n \arrow[dr, "l_x"] & \\
 & \overline{X} \\
\{d_i(x)\}\times\Delta_{n-1} \arrow[uu, "\tilde{D_i}(x)"] \arrow[ur, "l_{d_i(x)}"'] &
\end{tikzcd}$$

el colímite debe identificar $l_{d_i(x)}(d_i(x), p_{n-1})$ con $l_x(\tilde{D_i}(x)(d_i(x), p_{n-1}))$ para cada $p_{n-1}\in\Delta_{n-1}$, es decir,

$$(d_i(x), p_{n-1}) \sim (x, D_i(p_{n-1}))$$

Para el diagrama asociado

$$\begin{tikzcd}
\{s_i(x)\}\times\Delta_{n+1} \arrow[dr, "l_{s_i(x)}"] \arrow[dd, "\tilde{S_i}(x)"'] & \\
 & \overline{X} \\
\{x\}\times\Delta_n \arrow[ur, "l_x"'] &
\end{tikzcd}$$

el colímite debe identificar $l_{s_i(x)}(s_i(x), p_{n+1})$ con $l_x(\tilde{S_i}(x)(s_i(x), p_{n+1}))$ para cada $p_{n+1}\in\Delta_{n+1}$, es decir,

$$(s_i(x), p_{n+1}) \sim (x, S_i(p_{n+1}))$$

Por tanto,

$$L(X) = \mathrm{Colim}(\ \textstyle\int_\Delta X \xrightarrow{\pi_X} \Delta \xrightarrow{A} \mathbf{Top}\ ) = \displaystyle\coprod_{n=0}^{\infty} (X_n\times\Delta_n)/\sim$$

con la relación de equivalencia expresada anteriormente. Luego

$$L(X) = |X|$$

lo que significa que L es el funtor realización $|\cdot|$.

Conclusiones

La elaboración de este trabajo me ha servido para ver cómo una teoría tan abstracta como es la teoría de categorías es capaz de capturar la información geométrica de los complejos simpliciales. Resulta sorprendente que una estructura geométrica compleja como un conjunto simplicial pueda ser capturada mediante un funtor.

Además, me ha llamado la atención el hecho de que construcciones como la realización geométrica y el conjunto simplicial singular aparecen de modo natural considerando técnicas categóricas. Es muy gratificante ver cómo resultados importantes pueden ser expresados con tanta elegancia mediante el uso de estas herramientas.

Debemos señalar también que el que hemos llamado *Teorema de Mac Lane - Moerdijk (3.3.2)* es un teorema de una potencia muy elevada, ya que no solo garantiza la existencia de dos funtores adjuntos de unas características determinadas, sino que además nos permite, gracias a la categoría de Grothendieck, dar una construcción explícita de los mismos.

A nivel personal y formativo, este trabajo me ha permitido completar mi formación introduciéndome levemente en la teoría de conjuntos y la teoría de categorías, y me ha dado la oportunidad de relacionar diversos conceptos vistos en el grado con otros totalmente nuevos para mí. He tenido también la oportunidad de enfrentarme a las dificultades que supone desarrollar un proyecto por mi cuenta junto con la dirección de mis tutores, lo que estoy seguro de que me ayudará a nivel profesional en un futuro.

Desde el punto de vista matemático, este TFG me ha motivado a descubrir diferentes aplicaciones de la teoría de categorías a otros ámbitos matemáticos como la geometría diferencial y la geometría algebraica. Por otro lado, el estudio combinatorio de los espacios topológicos permite una interrelación con las técnicas de computación científica, que es uno de los ámbitos en los que la investigación puede aportar resultados interesantes.

Bibliografía

[1] M. Artin, A. Grothendieck, and J. L. Verdier. *Séminaire de géométrie algébrique du Bois-Marie, SGA 4*. Springer, 1963-1964.

[2] S. Awodey. *Category Theory.* Oxford University Press, 2006.

[3] J. Dugundji. *Topology.* Allyn and Bacon, 1966.

[4] S. Eilenberg and S. Mac Lane. General theory of natural equivalences. *Transactions of the American Mathematical Society*, 58:231–294, 1945.

[5] S. Eilenberg and J. A. Zilber. Semi-simplicial complexes and singular homology. *Annals of Mathematics*, 51:499–513, 1950.

[6] G. Friedman. An elementary illustrated introduction to simplicial sets. *Rocky Mountain J. Math.*, 2:353–423, 2011.

[7] S. Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician.* Springer, 1978.

[8] S. Mac Lane and I. Moerdijk. *Sheaves in Geometry and Logic.* Springer, 1994.

[9] A. T. Lundell and S. Weingram. *The topology of CW-complexes.* Van Nostrad Reinol Company, 1969.

[10] J. P. May. *Simplicial objects in algebraic topology.* The University of Chicago Press, 1967.

[11] H. Simmons. *An introduction to category theory.* Cambridge University Press, 2011.